Ukážky maturitných otázok z matematiky - DÔKAZY

Základy matematiky:

1. Vypočítajte hodnoty trojčlena T(n) = $n^2 - 8n + 12$ pre n = 1,2,3,4,5,6,7,8
   Vyslovte a dokážte existenčný a všeobecný výrok o kladnosti a zápornosti T(n)

2. Pomocou Vennových diagramov dokážte:
   $$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

3. Nech a, b, c$\in$ R;   a + b + c = 0,   Dokážte, že: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

4. Dokážte,že $\sqrt{2}$ nie je racionálne číslo.

5. Dokážte, že rovnica: $\sqrt{2 + x^2} = x - 1$ nemá v R koreň a rovnica $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2 - x$ má nekonečne veľa riešení v R.

6. Dokážte, že sústava nerovníc
   $x+y \leq 3$
   $2x-y \geq 0$
   $x+2y \geq 5$ má jediné riešenie v $R^{2.}$ Použite grafické znázornenie.

7. Dokážte, že ak od trojciferného čísla odčítame jeho ciferný súčet, dostaneme číslo deliteľné deviatimi. (trojciferné číslo zapíšte dekadickým zápisom).

8. Dokážte matematickou indukciou, že pre každé prirodzené číslo n platí:
   $$2^1 + 2^2 + 2^3 + ...+ 2^n = 2.(2^n - 1)$$

Planimetria:

1. **Množiny bodov daných vlastností**
   a) Daná je priamka p a bod A tak, že $|Ap|$ = 4 cm. Znázornite všetky body X, pre ktoré platí: $|AX|$ = $|Xp|$= 5 cm.
   b) Dané sú kružnice $k_1(S$, 5 cm) a $k_2(S$, 3 cm) a bod M, pre ktorý platí $|SM|$ = 4 cm. Dokážte , že existujú také kružnice, ktoré sa dotýkajú kružníc k_1 , k_2 a prechádzajú bodom M.

2. **Základné útvary v rovine**
   Dokážte, že existuje kružnica, ktorá sa dotýka daných 2 rôznobežiek a má daný polomer r.

3. **Vzájomná poloha dvoch priamok, priamky a kružnice, dvoch kružníc**
   Dokážte existenciu takých kružníc s polomerom 1,5 cm, ktoré sa dotýkajú kružnice $k(S$, 4 cm) a prechádzajú bodom M, pre ktorý platí $|SM|$= 3 cm.

4. **Obvody a obsahy základných útvarov v rovine**
   Dokážte, že obsah kosoštvorca, ktorý má výšku v = 48 mm a kratšiu uhlopriečku u = 60 mm je menší ako obsah štvorca so stranou rovnakou ako má daný kosoštvorec.

5. **Základné prvky trojuholníka**
   Dokážte, že vonkajší uhol trojuholníka sa rovná súčtu vnútorných uhlov pri zvyšných vrcholoch.

6. **Uhly v útvaroch**

a) Pre vnútorné uhly konvexného štvoruholníka *ABCD* platí : $\alpha + \beta + \gamma = 360^o$. Overte správnosť tvrdenia.

b) Dokážte, že súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov tetivového štvoruholníka *ABCD* , ktorého vrcholy ležia v bodoch, ktoré na obvode hodinového ciferníka znázorňujú čísla 2, 5, 6, 10 sa rovná 360^o.

7. **Zhodnosť a podobnosť útvarov**

Dokážte, že sa dá zostrojiť rovnostranný trojuholník, keď je daná kružnica do neho vpísaná a bod na jeho jednej strane.

8. **Zhodnosť a podobnosť trojuholníkov**

a) Dokážte, že priečka, ktorá spája päty dvoch výšok v trojuholníku, oddeľuje z neho trojuholník podobný danému trojuholníku.

b) Človek, ktorý má výšku *c*, sa vzďaľuje priamou cestou od svietiaceho majáka s výškou *m*. Dokážte, že dĺžka s tieňa človeka je priamo úmerná vzdialenosti a človeka od majáka.

9. **Zhodné zobrazenia v rovine** .

Dokážte na zhodnom zobrazení, že existuje také zhodné zobrazenie, ktoré zobrazí trojuholník na trojuholník s rovnakou orientáciou ?

10. **Osová a stredová súmernosť**

Dané sú dve kolmé priamky p, q. Aké zobrazenia môžeme dostať zložením konečného počtu osových súmerností podľa p a q ? Dokážte, že to budú zhodné zobrazenia.

11. **Posunutie a rotácia**

V pravouhlej sústave súradníc sú dané body *A*[-3;5], *B*[8; 2], *C*[-2;-5], *D*[6; -2], *S*[0; 0]. Určte súradnice ich obrazov v rotácii : a) $R(S; 90^o)$, b) $R(S; -90^o)$.
Dokážte, že súradnice obrazov daných bodov, budú opäť celé čísla.

12. **Podobné zobrazenia v rovine**

Dokážte, že obrazom priamky $y = x + 4$ v rovnoľahlosti $H(A, -2)$, kde $A(0,0)$ bude opäť priamka. Napíšte jej rovnicu.

13. **Pytagorova a Euklidova veta**

Pre ktoré x je trojuholník so stranami 7, x, x +1 pravouhlý ? Dokážte.

<u>Stereometria:</u>

1. Daná je kocka *ABCDEFGH*. Body *U* ,*V* sú stredy hrán *AE* , *CG*.

a) Dokážte, že priamky *HU* a *BV* sú rovnobežné

b) Dokážte, že *AC* je kolmé na *BH*

Pri dôkaze použite vety zo stereometrie a obraz kocky vo voľnom rovnobežnom premietaní ako aj výpočtovú metódu.

2. Vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ sú kolmé na vektor $\vec{c}$. Dokážte, že potom aj vektory

a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $3\vec{a} - 2\vec{b}$ sú kolmé na vektor $\vec{c}$

Využite kolmosť vektorov pri hľadaní všetkých bodov *X* [*x* ; *y* ; *z*], pre ktoré platí:

$AX \perp \vec{u}$; A [3; 5; -7] $\vec{u}[4;-1;2]$

3. Zistite, či je priamka p kolmá na rovinu ρ $p = \{[1 - t ; 2 + 3t ; 1 - 2t]; t \in R\}$
$\rho: \ 4x - 12y - z + 11 = 0$

Vypočítajte:
a) uhol priamky s rovinou
b) parameter priesečníka priamky s rovinou
c) vzdialenosť bodu $A[1;2;1]$, ktorý leží na priamke, od roviny ρ

4. Odvoďte vzorec pre výpočet objemu a povrchu pravidelného štvorstena.

Vypočítajte:
a) odchýlku bočnej hrany od roviny podstavy
b) odchýlku bočnej steny od roviny podstavy

5. Dokážte, že teleso, ktoré vznikne rotáciou trojuholníka okolo jednej jeho strany, má objem $V = \frac{2}{3}\pi.v.S$, kde S je obsah trojuholníka a v je výška na stranu, okolo ktorej rotuje.

Pri riešení úlohy využite nasledovný poznatok:
Rotáciou pravouhlého trojuholníka ABC okolo odvesny BC vznikne rotačný kužeľ, rotáciou toho istého pravouhlého trojuholníka ABC okolo odvesny AC vznikne iný rotačný kužeľ. Vypočítajte pomer objemov týchto dvoch kužeľov.

6. Do gule s polomerom 6 cm je vpísaný rovnostranný valec a rovnostranný kužeľ.
a) Vypočítajte polomer a výšku rovnostranného valca a určte koľko percent z objemu gule zaberá objem valca.
b) Vypočítajte polomer a výšku rovnostranného kužeľa a určte koľko percent z objemu gule zaberá objem kužeľa.

7. Odvoďte vzorec pre výpočet objemu zrezaného kužeľa, ktorého podstavy sú kruhy vpísané a opísané dvom stenám kocky s hranou a. Porovnajte objemy zrezaného kužeľa a kocky.

8. Daná je kocka *ABCDEFGH* s hranou a. Vrcholmi jednej podstavy zrezaného ihlana sú stredy strán steny *EFGH* („vpísaný štvorec“), strany druhej podstavy zrezaného ihlana obsahujú body A, B, C, D („opísaný štvorec“).

Odvoďte vzorec pre:
a) obsah plášťa zrezaného ihlana
b) povrch zrezaného ihlana
c) objem zrezaného ihlana

9. Dokážte, že povrch gule, ktorá sa dotýka všetkých hrán kocky, sa rovná rozdielu povrchov gúľ kocke opísanej a vpísanej.
Vypočítajte, koľko percent z objemu kocky zaberá objem vpísanej gule.

10. Dokážte, že priamka p je rôznobežná s rovinou ρ a bod M neleží ani na priamke ani v rovine.
Nájdite na priamke p bod K, pre ktorý je priamka KM rovnobežná s rovinou ρ.

$\rho: 2x + 7y - 3z + 4 = 0$ $\quad p = \{[2 - 4t ; 3t ; 4 - t] ; t\in R\}$ $\quad M [3; -2; -2]$

11. Dokážte, že body $A[2; 1; 6]$ $B[0; -1; -6]$ $C[-1; 2; 0]$ určujú rovinu a napíšte:
a) jej parametrické rovnice
b) všeobecnú rovnicu
c) vypočítajte súradnice bodov, v ktorých rovina ABC pretína os o_x , o_y , o_z .
d) rozhodnite, či body $K[2; 4; 15]$ $L[-3; 2; 6]$ ležia v rovine ABC
e) vypočítajte $z\in R$ tak, aby bod $M[-2; 1; z]$ ležal v rovine ABC

12. Dokážte, že priamky $p = \{[1 + 2t ; -1 + 2t ; 3 – t] ; t\in R\}$ $q = \{[4 + 3s ; 3 + 2s ; 1]; s\in R\}$ sú mimobežné. Ukážte, že neexistuje rovina, ktorá obsahuje priamky p , q .

Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika:

1. Dokážte, že pravdepodobnosť, že náhodne vybrané dvojciferné číslo bude prvočíslo, alebo mocnina čísla 2 je 26,67 %.

2. Traja strelci strieľajú (každý raz) na ten istý terč. Prvý zasiahne cieľ s pravdepodobnosťou 0,7, druhý s pravdepodobnosťou 0,8 a tretí zasiahne zo sto pokusov presne 90. Ukážte, že pravdepodobnosť, že terč zasiahnu aspoň raz je 99,94%

3. Dokážte, že pre n $\geq$ 2 platí, že $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} - 2.\binom{n}{n-2} = 2n$

4. Dokážte, že:
   a) n.(n-1)! +n.n! = (n+1)!
   b) n! + n^2.(n-1)! = (n+1)!

5. Ukážte, že rovnica $\frac{(n-1)!}{2.(n-3)!} - n = 19$ má jediný koreň, pričom n $\geq$ 5

6. Ukážte, že neexistuje člen binomického rozvoja výrazu $\left(10y - \frac{1}{y^4}\right)^{11}$ ktorý by neobsahoval y.